МОДЕЛЮВАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ В АВТОМОБІЛЕБУДУВАННІ І ТРАНСПОРТНИХ СИСТЕМАХ

УДК 519.853

МОДЕЛЬ И МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПОИСКА ОПТИМАЛЬНОГО СОЕДИНЕНИЯ ПРИ ОГРАНИЧЕНИИ НА КРИВИЗНУ

Л.Н. Козачок, ст. преп., Плехова А.А., доцент, к.т.н., ХНАДУ,
Д.А. Плехов, студент НЮУ им. Ярослава Мудрого

Аннотация. *В данной статье поставлена актуальная задача соединения двух точек в неодносвязной области трассой, на которую накладывается ограничение на кривизну, построена математическая модель этой задачи и представлен алгоритм ее решения, основанный на необходимых условиях экстремума.*

Ключевые слова: *оптимизация, неодносвязная область, кратчайший путь, кривизна.*

МОДЕЛЬ ТА МЕТОД ВИРІШЕННЯ ЗАДАЧИ ПОШУКУ ОПТИМАЛЬНОГО З'ЄДНАННЯ З ОБМЕЖЕННЯМ НА КРИВИЗНУ

Козачок Л.М., ст. викладач, Плехова Г.А., доцент, к.т.н., ХНАДУ,
Плєхов Д.О., студент НЮУ ім. Ярослава Мудрого

Анотація. *У даній статті поставлено актуальне завдання з'єднання двох точок в неоднозв'язній області трасою, на яку накладається обмеження на кривизну, побудована математична модель цієї задачі та представлений алгоритм її вирішення, заснований на необхідних умовах екстремуму.*

Ключові слова: *оптимізація, неоднозв'язная область, найкоротший шлях, кривизна.*

MODEL AND METHOD OF SOLVING THE PROBLEM OF FINDING THE OPTIMAL CONNECTION WITH LIMITATION FOR CURVATURE

L. Kozachok, Senior Lecturer,
G. Plekhova, assistant professor, cand. eng. sc., KhNAHU,
D. Plekhov, student of National Law University

Annotation. *In this paper, we present the actual problem of connecting two points in a non-simply connected domain by a path, on which a curvature constraint is imposed, a mathematical model of this problem is constructed, and an algorithm for solving, based on the necessary conditions for the extremum, it is presented.*

Keywords: *optimization, non-simply-connected domain, shortest path, curvature.*

Введение

При проектировании промышленных объектов возникают задачи соединения в неодносвязных областях, связанные с оптимизацией размещения разного рода коммуникаций между зданиями и иными естественными препятствиями (например, водоемами). Важное место среди них занимает класс задач, где прямолинейные участки трасс должны проходить параллельно осям зданий – так называемые задачи манхеттеновой трассировки, причем во многих случаях использование класса ломаных оказывается недостаточным, как, например, при проектировании железнодорожных линий и некоторых типов трубопроводов, что требует вводить ограничение на кривизну.

Постановка задачи

На плоскости R^2 дана система координат *Oxy*. Рассмотрим неодносвязную область $F \subset R^2$ вида

$$F = \frac{C\ell F_0}{\bigcup_{i=1}^{n} F_i}; \quad C\ell F_0 \subset F_0 \,(i = 1, 2, ..., n) \quad (1)$$

где $F_i (i = 1, 2, ..., n)$ – односвязные области,, взаимно непересекающееся при $i \geq 1$, границы которые составлены из *p*-ломаных, т.е. манхеттеновые [1] ломаных в F, образующих класс линий W. Длинна этих линий определяется рассматриваемой далее метрикой

$$\rho(A.B) = |X_A - X_B| + |Y_A - Y_B|, \qquad (2)$$

порождающей пространство R_1^2 [1].

Для описания трасс введем в рассмотрение [2] класс линий, составленных из отрезков, параллельных осям заданной декартовой системы координат Oxy и дуг окружности с угловой мерой $\pi / 2$ и фиксированным радиусом r. Этот класс линий $\tilde{W}$ является естественным обобщением функционального класса W – манхеттеновых ломаных; поэтому, для определенности, назовем его квазиманхеттеновым. При этом считаем, что всякая линия $\omega \in \tilde{W}$ имеет стандартное представление в виде следующей последовательности:

$$\omega = s_1 c_1 s_2 c_2 ... c_{k-1} \cdot s_k, \quad (k \geq 1), \qquad (3)$$

где s_i – это ρ_1-кратчайшая, т.е. отрезок в обычном смысле, параллельный одной из осей координат, а c_i – дуга окружности с угловой мерой $\pi / 2$, для которой векторы касательных в концевых точках параллельны осям координат и по направлению (с точностью до знака) совпадают со смежными ρ_1-кратчайшими, если имеются. Ясно, что длина этой дуги $\ell(c_i)$ в метрике (2) равна $\ell(c_i) = 2r$. Поэтому дуга c_i является кратчайшей в пространстве R_1^2.

Как и в случае ломаных класса W, можно выделить в $\tilde{W}$ кратчайшее двух типов. Так, пусть координаты точек $T, G \in R_1^2$ удовлетворяют условию

$$|T_x - G_x| = r, \quad |T_y - G_y| = r.$$

В этом случае они лежат в диагонально противоположных вершинах квадрата $GZTU$, в который могут быть вписаны круги типа C', C'' с центрами соответствующих окружностей в точках Z и U. При этом расстояние между точками G и T равно $2r$, граничные условия для дуги C' с центром в точке U соответствуют ρ_2-кратчайшей GZT с последовательностью изменения координат (y, x) при ее ориентации от G к T, а для дуги C'' – соответственно (y, x).

Положим для определенности, что тип ξ, $\xi \in \{y, x\}$, ρ_1-кратчайшей ρ_ξ и вектора касательной τ_ξ определяется по правилу: $\xi = x$, если соответствующий отрезок параллелен оси *Ox*, и $\xi = y$ – в противном случае.

Определение

Линию $w \in \tilde{W}$ вида (3) с началом и концом в точках Z_1, Z_2 назовем c-канонической, если ее длинна равна расстоянию $\rho(Z_1, Z_2)$; c-каноническую назовем c_1-кратчайшей, если она представляется ρ_1-кратчайшей, и c_2-кратчайшей типа $c_{2\xi}$, если она имеет стандартное представление вида

$$s_\xi c s_\mu, \ (\xi, \mu \in \{x, y\}, \ \xi = \mu), \ \ell(s_\xi), \ \ell(s_\mu) \geq 0.$$

Для фиксированной точки $A \in F$ может быть задано граничное условие $\vec{\tau}_A$, состоящее в том, что из множества линий класса $\tilde{W}$ с концом в A выделяется подмножество $W / \vec{\tau}_A$, касательный вектор для которых в точке A с точностью до направления совпадает с $\vec{\tau}_A$.

Поскольку задача поиска оптимального пути в неодносвязной области многоэкстремальна, в соответствии с общей концепцией [3] регуляризации задач соединения приходим к вариационной задаче поиска оптимального соединения в классе эквивалентности пути $[e]_L \subset L(A, B)$, определяющем множество линий из класса L с концами в точках A, B гомотопных заданному пути e. Эта общая задача о поиске геодезической в классе $[e]_L$ соответственно типу ограничений определяет следующие важнейшие подзадачи:

Задача 1. $(L = W)$ – базовая задача о поиске манхеттеновой ломаной минимальной длинны и минимального числа изломов.

Задача 2. $(L = \tilde{W})$ – базовая задача о поиске квазиманхеттеновой геодезической.

Задача 3. $(L = \tilde{W} / \vec{\tau}_A, \vec{\tau}_B)$ – базовая краевая задача о поиске квазиманхеттеновой геодезической.

Принципиальной особенностью задач 2 и 3 является, что в силу специфики структуры (1) области F они могут не иметь решения, тогда как задача 1 всегда имеет решение, причем единственное в смысле непрерывного семейства экстремалей [1]. Поэтому актуальным представляется выявление необходимых и достаточных условий, анализ которых позволяет либо установить отсутствие решений, либо осуществить его конструктивное пространство.

Необходимые и достаточные условия оптимальности

Допустим, что решение задачи 2 существует и представляется c-кононической линией $\omega = s_1 c_1 s_2 c_2 \ldots c_{k-1} \cdot s_k$.

Поскольку все канонические пути лежат в множестве допустимых деформаций Q [1], ограниченном двумя каноническими ρ-ломаными q_1 и q_2, то линия ω должна лежать в Q, где любой монотонный путь дает каноническую линию, а путь, полученный максимальными движениями, – каноническую линию, имеющую минимальное число изломов.

В множестве Q могут лежать подмножества трех типов:

– область типа поле, где пара точек может быть соединена c_2-кратчайшей;

– область типа трубка, где никакая пара точек не может быть соединена c_2-кратчайшей;

– множество типа нить, т.е. ρ_1-кратчайшая.

Рассмотрим необходимые условия, которым должно удовлетворять множество Q, чтобы c-каноническая линия могла быть построена в нем посредством замены точек излома $c_{2\xi}$-кратчайшими (соответствующие доказательства приведены в [2]).

Не теряя общности предположим, что координаты точек A и B удовлетворяют условию $A_x < B_x$, $A_y < B_y$. Для каждой ρ_1-кратчайшей $C_i C_{i+1}$ из q_1, параллельной оси Ox, построим область Ω_i, взяв объединение сегмента с угловой мерой $\pi / 2$ и радиусом r и прямоугольника высотой (рис. 1, а, б). Аналогично построим для ρ_1-кратчайших $D_j D_{j+1}$ ρ-ломаной q_2, которые параллельны.

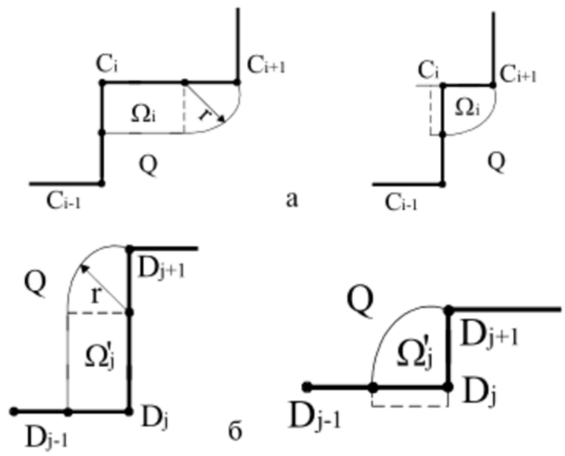
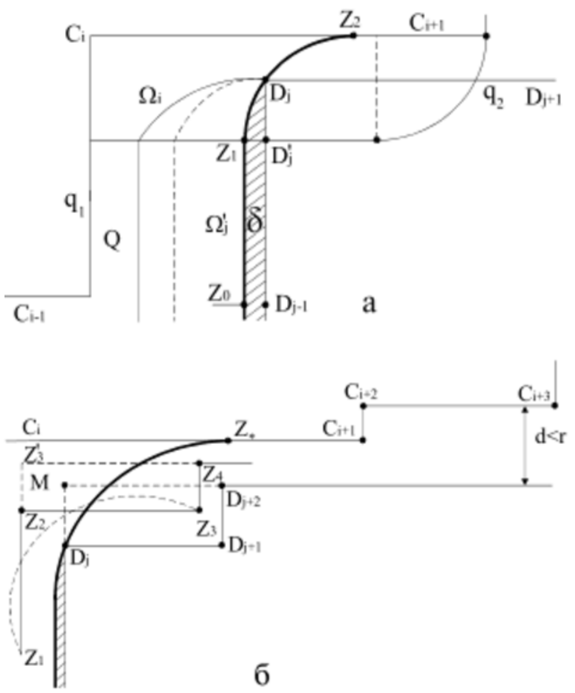


Рис. 1. Построение области W_i

1. Допустим, что ни одна область Ω_i не пересекается с q_2 и что ни одна область Ω_j не пересекается с q_1. Тогда область $R = Q / \left(\bigcup_i \Omega_i \bigcup_j \Omega_j \right)$ образует поле, так как каждая из канонических ρ-ломаных ρ_x, ρ_y, полученных максимальными движениями в R из A в B, допускает замену точек излома c_2-кратчайшими. Поскольку одна из этих ρ

-ломаных имеет минимальное число изломов в $[e] \cap W$, соответствующая ей каноническая линия ρ_* дает решение задачам 1 и 2. Решение задачи 1 получим, фиксируя начальный и конечный тип ρ_1-кратчайшей.

2. Допустим, что область Ω_i имеет пересечение с q_2 (рис. 2, а), а область Ω'_j не пересекается с q_1.



а – трубка не имеет сужения; б – трубка имеет сужение

Рис. 2. К анализу объединения поля с трубкой

Назовем эту ситуацию соединением поля с трубкой: здесь предельная Z_1Z_2, имеющая касание с C_iC_{i+1} в точке Z_2 и касание с точкой D_j, определяет точку Z_1 и соответствующую область δ, ограниченную отрезками Z_1Z_0, Z_0D_{j-1}, $D_{j-1}D_j$ и дугой D_jZ_1. Очевидно, что если некоторая каноническая ρ-ломаная имеет точки в δ, она не реализуема в c-линию посредством замены ρ_2-кратчайшей с изломом в Ω, если только не будет сдвинута влево из области δ. В подобном случае можно говорить, что множество Q в окрестности D_j имеет структуру поле-трубка. Следовательно, необходимые условия преобразования канонической ρ-ломаной в c-каноническую линию для структуры поле-трубка имеют вид:

$U_1 : \delta \cap (C_{i-1}C_i) = \varphi$ – условие поворота в трубку из области;
$U_2 : \Omega'(\delta) \cap (C_{i-1}C_i) = \varphi$ – условие сохранения поля трубки.

Ясно, что аналогичные условия имеют место для перехода из трубки в поле.

3. Рассмотрим случай сужения трубки (рис. 2, б). Если ρ-ломаная имеет фрагмент $Z_2Z_3Z_4$, пересекающий прямоугольник $D_jD_{j+1}D_{j+2}M$, его можно заменить эквивалентным по длине, но уже допустимым для построения c-линии фрагментом $Z_2Z'_3Z_4$. В случае расширения трубки на участке $C_{i+1}C_{i+2}C_{i+3}$ ситуация не влечет каких-либо осложнений для преобразования ρ-ломаной в c-линию.

4. Ортогональные трубки. Если в случае 2 выполнено условие U_1, но условие U_2 не выполнено, имеем структуру c-трубки, где на участке между сечениями C_{i-1} и C_{i+1} возможна реализация лишь c_2-кратчайшей типа c_{2y}.

5. Найти. Сочленение трубка-нить одного типа переводят трубку в нить; сочленение трубки и нити различных типов не обеспечивает реализацию c-линии. Соединение типа поле-нить подобно случаю 2 определяет область δ с границей $C_iZ_2Z_1D_{j-1}$ и условия реализуемости, аналогичные U_1 и U_2.

Таким образом, по известному множеству Q, задающему область возможного размещения произвольных канонических линий для точек A и B в F, последовательный просмотр составляющих его полей, трубок и нитей с сопутствующим сжатием области Q за счет введения в рассмот-рение множеств типа δ позволяет выделить подмножество $\tilde{Q} \subset Q$, всякая каноническая ρ-ломаная из которого может быть преобразована в c-каноническую линию.

Далее, в случае задания граничных условий для одной или обеих точек A, B пополним область $\tilde{Q}$ соответственно одной или двумя нитями произвольной малой, но конечной длинны в точках A, B, причем так, чтобы их тип соответствовал векторам $\vec{\tau}_A, \vec{\tau}_B$. Полученную область обозначим Q_*.

Теорема 1.
Для существования решения задач 1–3 в области Q достаточно, чтобы область $\tilde{Q}$ (соответственно Q_*) была связной. При этом длинна и число составляющих решение c_2-кратчайших равно соответственно длине и числу изломов решения ρ_* базовой задачи о построении в $\tilde{Q}$, Q_* ρ-ломаной минимальной длинны и минимального числа изломов.

В случае, когда кратчайшая ρ-ломаная $p_* \in [e]_W$ определяет более одной канонической области, т.е. последовательность вида $Q_1, Q_2, ..., Q_m$, при построении решения задач 2, 3 необходимо осуществить соединение c-канонических линий, лежащих в областях $\tilde{Q}, \tilde{Q}_{i+1}$, между собой по соответствующей нити N_i подобно тому, как это делалось для канонических ρ-ломаных [1]. Замену нити N_i областью V_i, где граница $\tilde{L}_i$ отстоит от N_i на минимальном расстоянии d_i, при котором объединение $\tilde{Q}_U$ становится связным, назовем минимальным расширением области $\tilde{Q}_U$ на участке $(i, i+1)$. Для определенности положим, что $d_i = 0$, если подобного расширения производить не требуется. Отсюда вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 2.
Если минимальное расширение существует, то оптимальное решение задач 2, 3 в классе $[e]_{\tilde{W}}$ по длине отличается от оптимальной ρ-ломаной $p_* \in [e]_W$ не более, чем на $d_* = 2\sum_{i=1}^{m-1} d_i$.

Алгоритмы решения поставленных задач

Решение задач 2, 3 предлагается искать с помощью алгоритма, состоящего из последующей последовательности процедур.

Алгоритм 1.
Процедура 1. Выделение канонических областей. Начальные и канонические точки M_i, N_i областей $Q_1, Q_2, ..., Q_m$ с линейной трудоемкостью могут быть получены с помощью алгоритма построения ρ-ломаной минимальной длины и минимального числа изломов ρ_* в классе $[e]_{\tilde{W}}$, $\rho_* = P_1^* U P_2^* U ... U P_m^*$, где $P_i^* \subset Q_i$ – существующие канонические ρ-ломаные.

Процедура 2. Построение области $\tilde{Q}_U$. Рассмотрение вершин границы $L_j, (j = 0, 1, 2, ..., n)$ в прямоугольнике с вершинами M_i, N_i дает область Q_i, после чего выделение областей $\tilde{Q}_i, Q_*$ производится как описано выше. Область $\tilde{Q}_U$ получается их объединением с соответствующими ρ_1-кратчайшими.

Процедура 3. Построение оптимальной c-линии. Если область $\tilde{Q}_U$ связана, построение в ней ρ-ломаной минимальной длинны и минимального числа изломов (по процедуре 1) ρ'_* дает аналог решения: r-окрестностей ее точек излома дугами в силу произведенных теорем дает искомое решение – c-линию $\tilde{q}$.

Этот алгоритм сходится по построению и при наличии допустимого расширения обеспечивает построение решения задач 2, 3 с трудоемкостью, которая (соответственно процедурам) по порядку величины соответствует трудоемкости [2] решение задачи о построении ρ-ломаной минимальной длины и минимального числа изломов $\chi \sim \alpha n_1 n_2$, где α – некоторая константа; $n_1 n_2$ – характеристики густоты вершин границ области F в окрестности пути e.

В случае, когда граничное условие для точки *B* не задано, а сама точка *B* должна лежать на некоторой сети $H \subset F$, получим задачу 4 – аналог задач 2, 3 с подвижным концом. Решить ее можно перебором экстремалей, определяемых классами эквивалентности пути, не имеющих самопересечений, которые получаются решением задачи о поиске кратчайшей в классе $\tau,\ \tau(0)=A,\ \tau(1)=B\big|_{B\in H}$, где начальная точка B может скользить по H Для решения этой задачи предлагается следующий.

Алгоритм 2.

1. Решая задачу 2 (или 3), для начального значения B с помощью алгоритм 1 получаем экстремаль ρ_*.

2. Отмечаем фрагмент ρ_{*_ν} экстремали ρ_*, лежащий в ее последней (считая от A) канонической области Q, где $\nu=\rho_{*_\nu}(0)$.

3. Решаем базовую задачу 4 для аналога выпуклой области; для этого ищем экстремаль в конусе $Q_\varepsilon \supset Q,$ порождаемом c-каноническими ограниченной длины $\varepsilon=\ell(\rho_{*_\nu})$, которые исходят из ν и опираются на фрагмент H_{Q_ε} сети H и Q_ε. Если функция цели для полученного решения ρ_ε не лучше, чем для ρ_{*_ν}, переходим к 5.

4. Заменяем фрагмент ρ_{*_ν} на ρ_ε, исключаем возможные наложения, обозначаем полученный путь ρ_* и переходим к 2.

5. Принимаем путь ρ_* за решение задачи 4.

Теорема 3.
Алгоритм 2 с полиноминальной трудоемкостью дает решение задачи.

Литература

1. Стоян Ю.Г. Нахождение оптимального пути в неодносвязной области на одном классе ломаных в R_1^2 / Ю.Г. Стоян, С.В. Смеляков // Укр. геометр. сб. – 1981. – Вып. 24. – С. 108–116.
2. Смеляков С.В. модель и метод решения задачи о построении пути минимальной длины про ограничении на кривизну / С.В. Смеляков, А.А. Алисейко. – Харьков: 1993. – 20 с.
3. Смеляков С.В. Глобальная и локальная регуляризация геометрических построений при решении задач соединения / С.В. Смеляков, А.А. Алисейко. – Харьков: 1990. – 44 с.

Рецензент: В.М. Колодяжный, профессор, д.ф-м.н., ХНАДУ.

Статья поступила в редакцию 26 мая 2017 р.