

АНАЛІЗ ТА ПРОГНОЗУВАННЯ ЧАСОВИХ РЯДІВ ДІНАМІКИ ЗНАЧЕНЬ ДОСЛІДЖУВАНОЇ ВЕЛИЧИНИ ЗА ДОПОМОГОЮ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНОГО ЗГЛАДЖУВАННЯ МЕТОДОМ БРАУНА

Л.М. Козачок, ст. викладач, ХНАДУ, А.Є. Козачок, студент НТУ «ХПІ»

***Анотація.** Аналіз, моделювання та прогнозування є найважливішими етапами дослідження статистичних експериментальних даних, згрупованих у часові ряди. Адаптивні моделі рядів, що застосовуються для згладжування їх значень та екстраполяції рівнів ряду у наступні моменти часу, враховують умови, які впливають на параметри моделі під час вимірювання або спостереження даної величини, і тому найбільш достовірно моделюють часовий ряд. У даній статті наведена програмна реалізація методу Брауна побудови адаптивної моделі часового ряду і отримані прогнозні значення досліджуваної величини за побудованою моделлю.*

***Ключові слова:** моделювання часових рядів, адаптивні моделі, метод Брауна.*

АНАЛИЗ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ ДИНАМИКИ ЗНАЧЕНИЙ ИССЛЕДУЕМОЙ ВЕЛИЧИНЫ С ПОМОЩЬЮ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО СГЛАЖИВАНИЯ МЕТОДОМ БРАУНА

Л.Н. Козачок, ст. преподаватель, ХНАДУ, А.Е. Козачок, студент, НТУ «ХПИ»

***Аннотация.** Анализ, моделирование и прогнозирование являются важнейшими этапами исследования статистических экспериментальных данных, сгруппированных во временные ряды. Адаптивные модели рядов, применяющиеся для сглаживания их значений и экстраполяции уровней ряда в последующие моменты времени, учитывают условия, влияющие на параметры модели во время измерения или наблюдения данной величины, и поэтому наиболее достоверно моделируют временной ряд. В данной статье представлена программная реализация метода Брауна построения адаптивной модели временного ряда и получены прогнозные значения исследуемой величины по построенной модели.*

***Ключевые слова:** моделирование временных рядов, адаптивные модели, метод Брауна.*

ANALYSIS AND FORECASTING OF THE TIME SERIES EXPLORED VALUES DINAMIC WITH THE EXPONENTIAL SMOOTHING BY THE BRAUN METHOD

L. Kozachok, senior lecturer, HNADU, A. Kozachok, student, NTU «KhPI»

***Abstract.** Analysis, modeling and forecasting are the most important stages in the study of statistical experimental data, grouped into time series. The adaptive models of series used to smooth out their values and extrapolate the levels of the series at subsequent times take into account the conditions that affect the parameters of the model during the measurement or observation of a given value, and therefore most reliably simulate the time series. In this article, a software implementation of Brown's method of constructing an adaptive time-series model is presented, and the predicted values of the explored trait from the constructed model are presented.*

***Keywords:** time series modeling, adaptive models, Brown's method.*

Вступ

Безліч науково-дослідницьких завдань потребують дослідження статистичних даних, що характеризують фізичні, математичні,

технічні або економічні процеси та надані у формі часових рядів. При аналізі останніх основна увага приділяється вивченню та моделюванню їх структури. Результатом математичного моделювання часових рядів є ма-

тематична модель, яка знаходиться аналітичними або алгоритмічними методами. Побудована модель дає можливість екстраполювати статистичні дані, а згодом прогнозувати значення часового ряду на наступні моменти часу.

Інструментом прогнозу при адаптивному алгоритмічному методі служить модель, початкова оцінка параметрів якої спирається на дані базового часового ряду у перші часові моменти. На основі нових даних, одержуваних на кожному наступному кроці, відбувається коригування параметрів моделі у часі і адаптація до нових, відмінних від початкових, умов розвитку досліджуваного процесу. Таким чином, модель використовує нову інформацію, яка з'являється з часом, і пристосовується до неї. Адаптивні моделі ізольованих рядів при всій їх простоті можуть давати більш надійні результати, ніж складні системи рівнянь, що описують процес.

Аналіз публікацій

В області аналізу часових рядів найбільш поширеними адаптивними моделями є модель авторегресії (autoregressive, AR) та модель змінного середнього (moving average, MA) [1,5]. Згідно з роботою [1], у моделі авторегресії значення процесу виражається як лінійна сукупність попередніх значень процесу і імпульсу, який називається «білим шумом». Для визначення помилки використовують метод найменших квадратів [1] або метод максимальної правдоподібності. Інший тип моделі, який часто використовується спільно з авторегресією називається моделлю змінного середнього. Існують прості, зважені, кумулятивні, експоненціальні моделі змінного середнього. За допомогою моделей згладжують значення часового ряду у задані моменти часу або прогнозують значення ряду на наступні моменти часу.

Модель експоненціального згладжування (exponential smoothing, ES) застосовується для моделювання технічних, фінансових і економічних процесів [5]. В основу експоненціального згладжування закладена ідея постійного перегляду прогнозних значень з урахуванням надходження фактичних. Початок розвитку методів адаптивного прогнозування покладено роботою Ч. Хольта, що з'явилася в 1957 р., у якій розглядалася проблема експоненціального згладжування. Найбільш повно

це питання було вивчено Р.Г. Брауном в його роботах разом з Майєром Р.Ф. [3, 4].

Ціль та постановка задачі

Розглянемо задачу аналізу та прогнозування часових рядів.

Нехай дано значення деякої множини $T \subset R$, які ми будемо називати моментами часу $t_0, t_1, \dots, t_n$, будемо розглядати дискретні значення моментів часу $t_i, i = \overline{1, n}$ такі, що інтервал між сусідніми значеннями однаковий, тобто $\Delta t = t_{i+1} - t_i = \text{const}$. Візьмемо впорядковану сукупність значень випадкової величини y , яка спостерігається у послідовні моменти часу $t_0, t_1, \dots, t_n$. Послідовність $y(t_0), y(t_1), \dots, y(t_n)$ називається часовим рядом і позначається $\{y_i\}_{i=0}^n$.

Задача даної роботи – вивчити початковий часовий ряд, проаналізувати та записати його модель для того, щоб мати можливість визначати значення часового ряду у будь-який наперед заданий момент часу, який не входить у множину T .

Для обчислення значень часового ряду у довільні моменти часу треба визначити функціональну залежність, яка відображає зв'язок між минулими та майбутніми значеннями цього ряду

$$y(t) = F(y(t-k), y(t-k-1), \dots) + \varepsilon_t,$$

де ε_t – випадкові коливання, які відображають вплив деяких випадкових факторів на величину $y(t)$.

Програмна реалізація алгоритму побудови моделі Брауна

Адаптивні моделі – це моделі дисконтування даних, здатні швидко пристосовувати свою структуру і параметри до зміни умов. При оцінці параметрів адаптивних моделей значенням часового ряду (рівням ряду) ставляться у відповідність різні ваги залежно від впливу їх досліджуваних на рівень часу.

Алгоритмічні методи побудови моделей часових рядів базуються на знаходженні не випадкової складової або періодичної компоненти за допомогою згладжування значень

часового ряду. Згладжування – це отримання часового ряду з найменшим розкидом рівнів, що дозволяє визначити наявність тренду та його характерні особливості. Дуже поширений є метод експоненціального згладжування часового ряду.

Якщо для прогнозування часового ряду, що має лінійну тенденцію, використовувати підхід, який спирається на модель експоненціального згладжування, то модель, як правило, буде давати змішані прогнози. Для таких часових рядів доцільно використовувати лінійну модель, в якій експоненціальне згладжування застосовується для оцінки коефіцієнтів адаптивної моделі.

У цих моделях прогноз може бути отриманий за допомогою наступного виразу:

$$y_p(t, k) = a_0(t) + a_1(t)k,$$

де $a_0(t), a_1(t)$ – поточні оцінки коефіцієнтів, k – час попередження прогнозу.

Розглянемо одну із таких моделей – модель Брауна, алгоритм її побудови наступний:

1. За першими п'ятьма точками часового ряду оцінимо початкові значення параметрів моделі a_0 та a_1 за допомогою методу найменших квадратів для лінійної апроксимації побудови прогнозних даних $y_p(t)$

$$y_p(t) = a_0 + a_1 \cdot t$$

2. Використовуючи параметри a_0 та a_1 за моделлю Брауна знаходимо прогноз значення часового ряду на один крок ($k=1$):

$$y_p(t, k) = a_0(t) + a_1(t) \cdot k,$$

t – момент початку прогнозування,
 k – інтервал упередження.

3. Отримане значення порівнюємо із фактичним та обчислюємо величину помилки

$$e(t+1) = y_p(t, 1) - y(t+1).$$

4. На наступному кроці відповідно до цієї величини коригуються параметри моделі a_0 і a_1 , зкориговані параметри використовуються для подальшого прогнозу. У моделі Брауна їх знаходять за формулами

$$\begin{aligned} a_0(t) &= a_0(t-1) + a_1(t-1) + (1-\beta)^2 e(t) \\ a_1(t) &= a_1(t-1) + (1-\beta)^2 e(t), \end{aligned}$$

де β – коефіцієнт, що змінюється від 1 до 0, та $\beta=1-\alpha$ (α – коефіцієнт згладжування).

5. Далі, обчислюючи коефіцієнти за моделлю, знаходимо прогноз на наступний момент часу.

Якщо $t < N$, то переходимо до 3 пункту, у іншому випадку, коли $t=N$, модель можна використовувати для прогнозування.

Прогнозування здійснюється за основною формулою, в яку підставляються значення параметрів $a_0(t)$ та $a_1(t)$, отримані на момент часу, у який надано останнє значення часового ряду, тобто параметри, отримані при останній ітерації циклічного процесу побудови моделі Брауна, а значення k буде інтервалом часу прогнозу від моменту часу надання останнього фактичного значення часового ряду.

Проведемо згладжування ряду за методом експоненціального згладжування Брауна для того, щоб виявити тенденцію спостережуваного ряду, у тому числі для подальшого застосування методів прогнозування, для цього використовуємо систему комп'ютерної математики Mathcad.

Спочатку за параметр згладжування візьмемо $\alpha = 0.3$, потім оптимізуємо функцію помилки оцінки, аргументом якої є параметр згладжування, і те значення параметра α , при якому помилка мінімальна, і будемо використовувати для згладжування. Результати, отримані при оптимальному параметрі згладжування $\alpha = 0,378$ показують задовільну відповідність між згладженими значеннями часового ряду та значеннями, що спостерігаються.

$$\alpha := 0.3$$

```

R(α) :=
  S ← 0
  ik ← 22
  yb1 ← Y
  p ← yb1 - y1
  S ← S + p2
  for i ∈ 1..ik - 1
    ybi+1 ← α·yi + (1 - α)·ybi
    p ← yi+1 - ybi+1
    S ← S + p2
  S

```

```

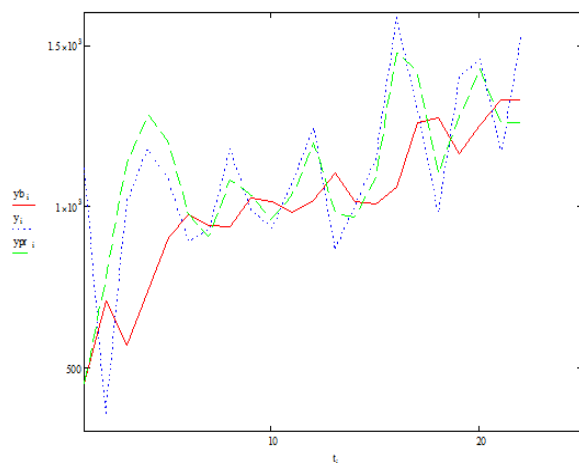
ybi :=
  ik ← 22
  yb1 ← Y
  for i ∈ 1..ik - 1
    ybi+1 ← α·yi + (1 - α)·ybi
  ybi

```

$$R(\alpha) = 1.796 \times 10^6$$

$\alpha := \text{Minimize}(R, \alpha)$

$$\alpha = 0.378$$



де y_i - експериментальні значення показника,

ypr_i - значення, отримані моделюванням часового ряду методом Хольта,

yb_i - значення, отримані моделюванням часового ряду методом Брауна.

Дотримуючись алгоритму побудови моделі, який описаний вище слід виконати наступні кроки, при цьому обчислення будемо проводити, використовуючи систему комп'ютерної

математики Mathcad:

1) Для перших п'яти значень даного часового ряду за допомогою апроксимації знайдемо пряму, яка ближче всього на графіку розташована до точок з координатами (t_i, y_i) , а точніше знайдемо коефіцієнти полінома першого порядку, який апроксимує значення часового ряду. Для цього скористаємося методом найменших квадратів і складемо систему нормальних рівнянь для знаходження двох невідомих a_0 та a_1 які є коефіцієнтами полінома першого порядку.

$t_i =$	$y_i =$
0	$1.119 \cdot 10^3$
1	352.2
2	$1.007 \cdot 10^3$
3	$1.178 \cdot 10^3$
4	$1.084 \cdot 10^3$

$$A := \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n-1} (t_i)^2 & \sum_{i=0}^{n-1} t_i \\ \sum_{i=0}^{n-1} t_i & n \end{bmatrix} \quad B := \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n-1} (t_i \cdot y_i) \\ \sum_{i=0}^{n-1} y_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} := A^{-1} \cdot B \quad \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75.58 \\ 796.96 \end{pmatrix}$$

2) Запрограмуємо алгоритм побудови моделі Брауна і отримаємо покрокові прогностні значення побудованої моделі часового ряду в середині даного проміжку часу, які є значеннями згладженого часового ряду, та використовуються для коригування коефіцієнтів a_0 та a_1 , а тобто налаштування самонавчальної моделі Брауна. Потім, використовуючи коефіцієнти, отримані на останньому кроці, обчислимо за формулою прогнозу прогностні значення часового ряду у моменти часу наступні до наданих у розглядаємому часовому ряді. Це і буде саме прогноз на декілька моментів уперед від кінцевого моменту часу T , наданому у спостережених значеннях, по осі змінення незалежної змінної t .

```

yprbi := | n ← 20
          | a00 ← 75.58
          | a10 ← 796.96
          | yprb0 ← 75.58
          | β ← 1 - α
          | τ ← 1
          | ε0 ← 1043.72
          | for i ∈ 1..n - 1
          |   | yprbi ← a0i-1 + a1i-1·τ
          |   | εi ← yi - yprbi
          |   | a0i ← a0i-1 + a1i-1 + (1 - β)2·εi
          |   | a1i ← a1i-1 + (1 - β)2·εi
          | yprbi

```

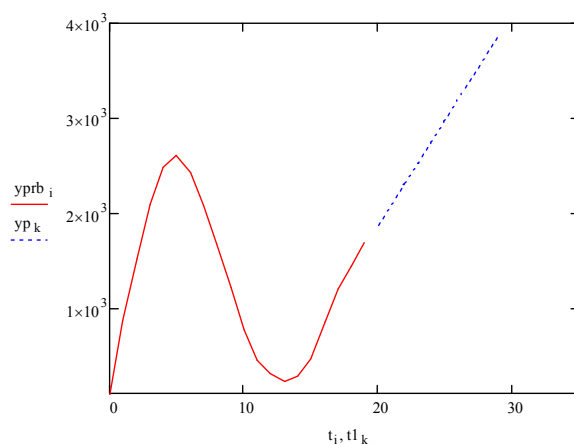
t1_k =

20
21
22
23
24
25
26
27
28
29

yp_k =

1.871·10 ³
2.093·10 ³
2.315·10 ³
2.537·10 ³
2.759·10 ³
2.981·10 ³
3.203·10 ³
3.425·10 ³
3.647·10 ³
3.868·10 ³

Графік значень часового ряду, отриманих за допомогою моделі Брауна, буде виглядати наступним чином.



де $yprb(t)$ - значення часового ряду, отримані при $t < N$,
а $yp(t)$ - значення, що є прогнозом поведінки часового ряду, отримані за моделлю Брауна для $t = N, N+10$ або $t1 = t - (N-1), t1 = 1, 10$.

Висновки

Отримані результати та їх графічне представлення підтверджують визначення методу Брауна, як методу короткострокового прогнозування.

Література

1. Ефимова М. Р. Общая теория статистики / М.Р. Ефимова, Е.В. Петрова, В.Н. Румянцев. – М.: Инфра-Н, 2000. – 127 с.
2. Бокс Дж., Дженкинс Г.М. Анализ временных рядов, прогноз и управление / Дж. Бокс, Г.М. Дженкинс. – М.: Мир, 1974. – 406 с.
3. Brown R.G. Smoothing forecasting and prediction of discrete time series / R.Brown. – N.Y., 1963.
4. Brown R.G., Meyer R.F. The fundamental theorem of exponential smoothing / R.Brown // Oper. Res. - 1961. - Vol.9. - №5.
5. Ф.А. Новиков Дискретная математика для программистов / Ф.А. Новиков. – Санкт-Петербург: Питер, 2001. – 304 с.

Рецензент: В.І. Вербицький, доцент, к.ф.-м.н. ХНАДУ.

Стаття надійшла до редакції 20 листопада 2017 р.